ref : Bernis
p. 181

Developpement : Théorème de Cartan - von Neumann :

leçons : 156
214
215
106

Théorème :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. Si G est fermé dans $GL_n(\mathbb{R})$, alors G est une sous variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

▶ Plan de la preuve :

Dans l'énnoncé, il faut comprendre "sous variété de $M_n(\mathbb{R})$" comme sous variété de $\mathbb{R}^{n^2}$. En effet, $M_n(\mathbb{R}) \overset{\varphi}{\cong} \mathbb{R}^{n^2}$ avec φ qui est $\mathcal{C}^\infty$.

La preuve consiste à trouver $\forall A \in G$ (1) un sev $\mathcal{L}_A$ de $M_n(\mathbb{R})$, (2) un voisinage ouvert U_A de 0 dans $M_n(\mathbb{R})$, (3) un voisinage ouvert V_A de A dans $M_n(\mathbb{R})$ et (4) un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi_A : U_A \to V_A$ qui vérifie

$$\begin{cases} \varphi_A(U_A \cap \mathcal{L}_A) = G \cap V_A \\ \varphi_A(0) = A \end{cases}$$

⚠ On a tourné le problème dans l'autre sens, mais ce n'est pas un problème car φ_A $\mathcal{C}^1$ difféo. (en gros on peut se ramener à la définition classique (voir celle du Lafontaine))

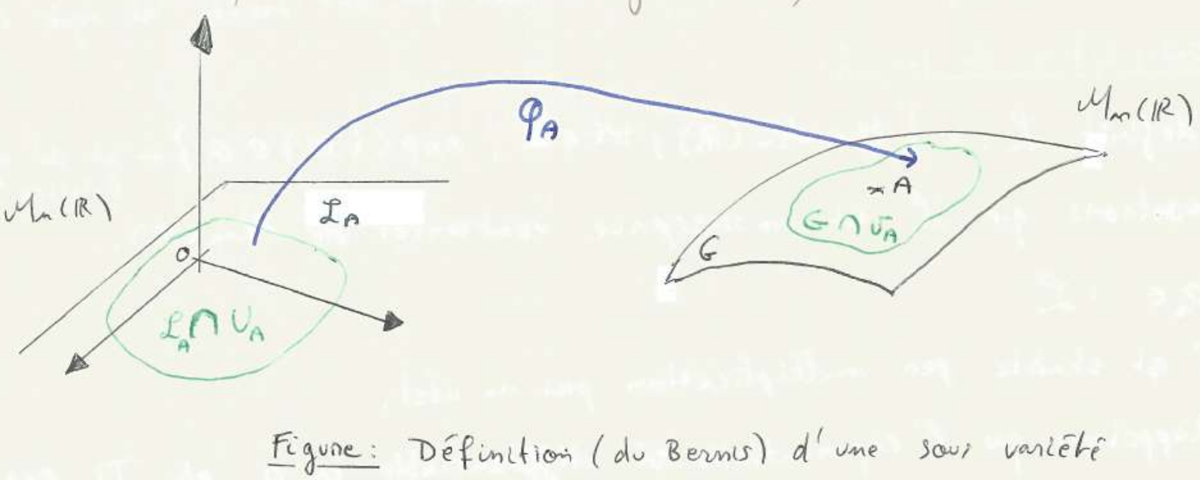

Figure : Définition (du Bernis) d'une sous variété

1 Réduction du problème :

Supposons que l'on ait trouvé dans le cas de I_n de tels éléments $\mathcal{L}_{I_n}$, U_{I_n}, V_{I_n} et φ_{I_n}, et montrons que cela suffit à prouver le théorème.

Soit $A \in G$. Considérons l'application $t_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $H \longmapsto AH$. C'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\left(\begin{array}{l} \cdot \text{ bij de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \cdot \text{ réciproque } t_{A^{-1}} \end{array} \right)$. De plus, t_A laisse G stable ($\forall H \in G$, $A.H \in G$ car G groupe multiplicatif).

Alors l'application $t_A \circ \varphi_{I_n} : U_{I_n} \to t_A(V_{I_n})$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme* vérifiant $t_A \circ \varphi_{I_n}(0) = A$ et

$$t_A \circ \varphi_{I_n}(\underbrace{U_{I_n}}_{\text{toujours un vois. de } 0} \cap \underbrace{\mathcal{L}_{I_n}}_{\text{toujours un sev de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = t_A(G \cap V_{I_n}) \underset{\text{car } t_A \text{ injective}}{=} t_A(G) \cap t_A(V_{I_n})$$

$$= G \cap \underbrace{t_A(V_{I_n})}_{\text{ouvert contenant } A \text{ donc voisinage de } A}.$$

Ainsi il suffit de prouver le théorème pour $A = I_n$.

<u>Remarque</u> : $t_A(\mathcal{L}_{I_n})$ est un sev de même dimension que $\mathcal{L}_{I_n}$. À la fin de la preuve on aura donc montré que la dimension de G en tant que sous variété est égale à celle de $\mathcal{L}_{I_n}$.

2 : Introduction du sev $\mathcal{L}$:

On définit $\mathcal{L} := \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \, ; \, \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tM) \in G \}$ ← on dit que $\mathcal{L}$ est l'algèbre de Lie de G

et montrons que $\mathcal{L}$ est un ss-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

* $0_n \in \mathcal{L}$
* $\mathcal{L}$ est stable par multiplication par un réel.
* Rappelons que l'exponentielle est différentiable en 0_n et $D_{0_n}\exp = I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.

  Donc d'après le TIL, exp induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local d'un voisinage ouvert $\tilde{U}$ de 0_n sur un voisinage ouvert $\tilde{V}$ de I_n

---

* Notons que $t_A(V_{I_n})$ ouvert comme image directe d'un ouvert par un $\mathcal{C}^1$ difféo.

Remarque :

Cet inverse s'appelle logarithme matriciel. Mais il ne faut pas en parler à l'oral car sinon il faut connaître les propriétés de cette application.

exp ∘ L (Id) = Id et on dérive

Notons L cet inverse local. Par la formule de la différentielle de l'inverse, on a $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $I_n + H \in \tilde{U}$:

(*)

$$\begin{aligned} L(I_n + H) &= L(I_n) + D_{\exp(O_n)} L . H + \underset{\|H\| \to 0}{o}(\|H\|) \\ &= O_n + (D_{O_n} \exp)^{-1} . H + \underset{\|H\| \to 0}{o}(\|H\|) \\ &= H + \underset{\|H\| \to 0}{o}(\|H\|) \end{aligned}$$

Soit $A, B \in \mathcal{L}$, $t \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand, $\frac{tA}{k}$ et $\frac{tB}{k} \in \tilde{U}$ et donc $\exp(\frac{tA}{k}) \times \exp(\frac{tB}{k}) \in \tilde{U}$.

· Pour un tel entier k assez grand, G étant stable par multiplication (en tant que groupe mult.), $(e^{\frac{tA}{k}} . e^{\frac{tB}{k}})^k \in G$.

· De plus, $(e^{\frac{tA}{k}} . e^{\frac{tB}{k}})^k = \left(e^{L(e^{\frac{tA}{k}} . e^{\frac{tB}{k}})}\right)^k$ pour $k \to +\infty$ $\exp(M)^k = \exp(kM)$

$$\begin{aligned} &= e^{k . L(e^{\frac{tA}{k}} . e^{tB/k})} \quad \text{"} \\ &= e^{k . L(I_n + t . \frac{A+B}{k} + o(\frac{1}{k}))} \quad \text{"} \\ (*) \to &= e^{t(A+B) + o(1)} \quad \text{pour } k \to +\infty \end{aligned}$$

donc par continuité de l'exponentielle, $(e^{\frac{tA}{k}} e^{\frac{tB}{k}})^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} e^{t(A+B)}$ et G étant fermé, $e^{t(A+B)} \in G$, c'est à dire $A + B \in \mathcal{L}$.

Ainsi : $\mathcal{L}$ est un ss.espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

▷ 3 : Construction du difféomorphisme.

soit $\mathcal{F}$ un supplémentaire de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

Remarque : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists!\ (L, F) \in \mathcal{L} \times \mathcal{F}$ tq $X = L + F$. On utilisera abusivement cette notation.

On définit
$$\varphi : \mathcal{L} \oplus \mathcal{F} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$$
$$L + F \longmapsto \exp(L) \cdot \exp(F)$$

On vérifie $\varphi(0_n) = Id_n$.

De plus, $\forall H = H_1 + H_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\varphi(0_n + H) = \Big(I_n + H_1 + \underset{\|H_1\| \to 0}{o}(\|H_1\|)\Big) \cdot \Big(I_n + H_2 + \underset{\|H_2\| \to 0}{o}(\|H_2\|)\Big)$$
$$= I_n + (H_1 + H_2) + \underset{\|H\| \to 0}{o}(\|H\|)$$
$$= \varphi(0_n) + H + \underset{\|H\| \to 0}{o}(\|H\|)$$

ce qui montre que φ est différentiable en 0_n, on a même $D_{0_n}\varphi = I_n$.

L'application φ est même de classe $\mathcal{C}^1$ comme produit de composés d'applications $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D'après le théorème d'inversion locale, $\exists\ U$ voisinage de 0_m
$\exists\ V$ voisinage de I_n, $V = \varphi(U)$

et $\exists\ \varphi : U \to \varphi(U)$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. D'après ce qui précède, nous savons déjà que $\varphi(\mathcal{L}) \subset G$ et donc $\varphi(\mathcal{L} \cap U) \subset G \cap \varphi(U)$.

Remarque : Rien ne garantit qu'on ait $\varphi(\mathcal{L} \cap U) = G \cap \varphi(U)$. Nous allons donc réduire le voisinage U afin de passer à l'égalité.

Supposons par l'absurde que pour tout voisinage W de 0_n inclus dans U, il existe un élément de $G \cap \varphi(W)$ dont l'antécédent X par φ ne soit pas dans $W \cap \mathcal{L}$, de sorte que $X = L + F$ avec $F \neq 0_n$.

En choisissant une suite strictement décroissante de tels voisinages (W_k) vérifiant $\bigcap_{k=0}^{+\infty} W_k = \{0_n\}$, on dispose d'une suite d'éléments de U $(X_k = L_k + F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0_n, telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi(X_k) \in G$ et $F_k \neq 0$.

Comme G est un groupe, $\forall k \in \mathbb{N}$, on a : $\exp(F_k) = \underbrace{\exp(-L_k)}_{\in G} \cdot \underbrace{\varphi(X_k)}_{\in G} \in G$

La suite $\left(\frac{F_k}{\|F_k\|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on peut quitte à extraire une sous suite supposer qu'elle converge vers un élément $F \in \mathcal{F}$, de norme 1 (car le sev $\mathcal{F}$ est fermé, car de dim finie).

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons e_k et f_k la partie entière et fractionnaire de $\frac{t}{\|F_k\|}$, c'est à dire $e_k = \left\lfloor \frac{t}{\|F_k\|} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ et $f_k = \frac{t}{\|F_k\|} - e_k \in [0, 1[$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, on a $\exp\left(t \cdot \frac{F_k}{\|F_k\|}\right) = \exp((e_k + f_k) \cdot F_k)$

$$= \exp(e_k \cdot F_k) \cdot \exp(f_k \cdot F_k)$$

Or par continuité de l'exponentielle, on a $\exp\left(t \cdot \frac{F_k}{\|F_k\|}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \exp(tF)$

Mais de plus, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, et la suite $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0_n puisque $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0_n et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{F}$. Ceci implique

$$\exp(f_k F_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} I_n$$

et ainsi $\exp(tF) = \lim_{k\to+\infty} (\exp(F_k))^{e_k}$

Or G est un groupe, donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(\exp(F_k))^{e_k} \in G$. G étant fermé, on a alors $\exp(tF) \in G$, et par suite $F \in \mathcal{L}$. Ainsi $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{F}$ ce qui implique $F = 0_n$ (car $\mathcal{F}$ supplémentaire de $\mathcal{L}$). Absurde car $\|F\| = 1$.

4 : Conclusion :

Quitte à restreindre U, l'application $\varphi : U \to \varphi(U)$ est donc un C^1-difféo vérifiant $\varphi(0_n) = I_n$ et $\varphi(\mathcal{L} \cap U) = G \cap \varphi(U)$.